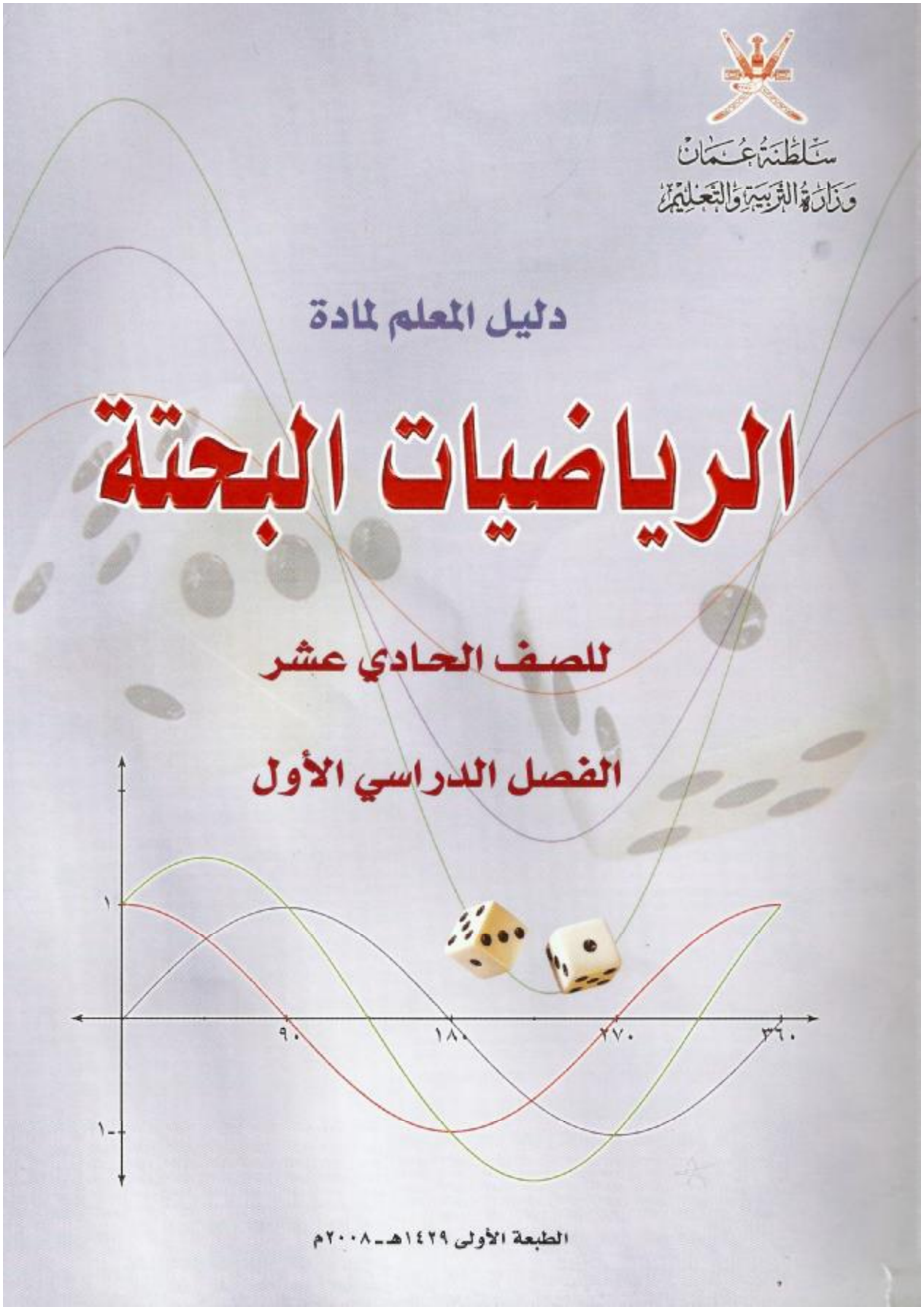

سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم
دليل المعلم لمادة
الرياضيات البحتة
للصف الحادي عشر
الفصل الدراسي الأول
١
١-
٩٠
١٨٠
٢٧٠
٣٦٠
الطبعة الأولى ١٤٢٩هـ-٢٠٠٨م

١٦ عدداً

إثـــراء

كم عدداً زوجياً مكون من رقمين أقل من ٦٠، يمكن تكوينه؟

الحـــل

- رقم العشرات ∋ {١، ٢، ٣، ٤، ٥}
- رقم الآحـــاد ∋ {٠، ٢، ٤، ٦، ٨}

∴ عدد الأعداد = ٥ × ٥ = ٢٥

تعزيـــز

بكم طريقة يمكن دخول إحدى القاعات والجلوس بداخلها، إذا كان للقاعة ثلاثة أبواب ويوجد بها ٢٠ كرسياً؟

الحـــل

٣ × ٢٠ = ٦٠ طريقة

حل تدريب ٢

أولاً : ٥ × ٥ = ٢٥ كلمة

ثانياً : ٢٨ × ٢٨ = ٧٨٤ كلمة

الطريقة الثانية هي الأفضل، إذ يصعب إيجاد الجواب عن طريق مخطط الشجرة لما يؤدي عمل ذلك الوقوع في أخطاء حسابية محتملة، وضياع جهد ووقت كثير.

إثـــراء

كم كلمة يمكن تكوينها من الأحرف الهجائية، بحيث تتكون الكلمة من ٣ أحرف مختلفة ويكون حرف «ب» في كل كلمة؟

الحـــل

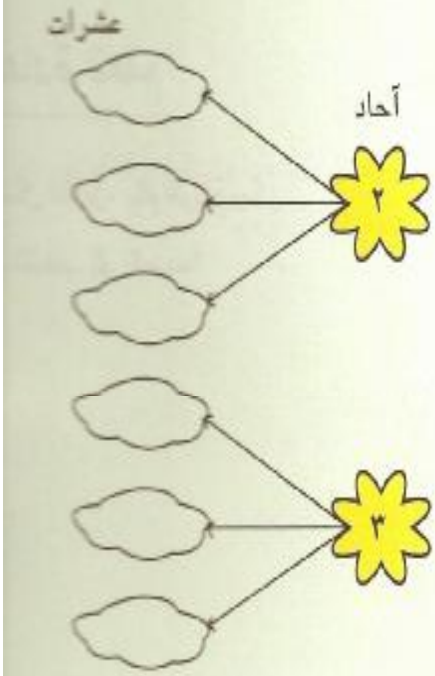
حرف «ب» يمكن أن يكون أول حرف أو ثاني حرف أو ثالث حرف.

∴ عدد الكلمات = (١ × ٢٧ × ٢٦) × ٣

= ٢١٠٦ كلمة

تعزيـــز

من الشكل :

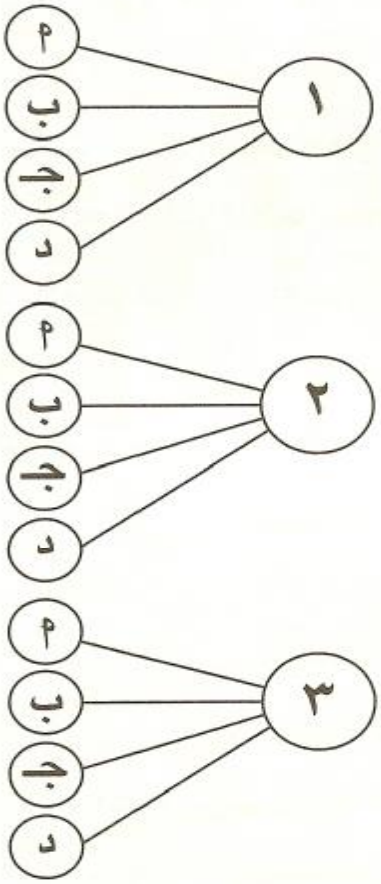


أكمل الفراغات لهذا المخطط لتكوين أعداد من رقمين بحيث يكون من ٤٠ .

حل تدريب ٣

٣ × ٤ = ١٢ طريقة

مخطط الشجرة هو :



حل تدريب ٤

م) ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٢٥٢٠ طريقة

ب) ٦ × ٦ × ٦ × ٢ = ٤٣٢ عدداً طبيعياً

حل تمارين ومسائل ١

١) عدد الأنواع = ٤ × ٦

= ٢٤ نوع

٢) الحالات الممكنة = ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠

= ١٠٠٠٠ بطاقة

٣) عدد الطرق = ٦ × ٣ = ١٨ طريقة

٤) عدد الطرق = ٢ (٣ × ٣ × ٢ × ١)

= ٧٢ طريقة

٥) عدد الخيارات الممكنة = ٣ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٧٢ خياراً

٦) عدد الطرق = ٣٥ × ٣٤ × ٣٣ × ٣٢

= ١٢٥٦٦٤٠ طريقة

٧) أ) ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ عدداً

ب) ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ عدداً

٨) عدد الطرق = ٦ × ١٠ × ١٠ × ٥ – ١

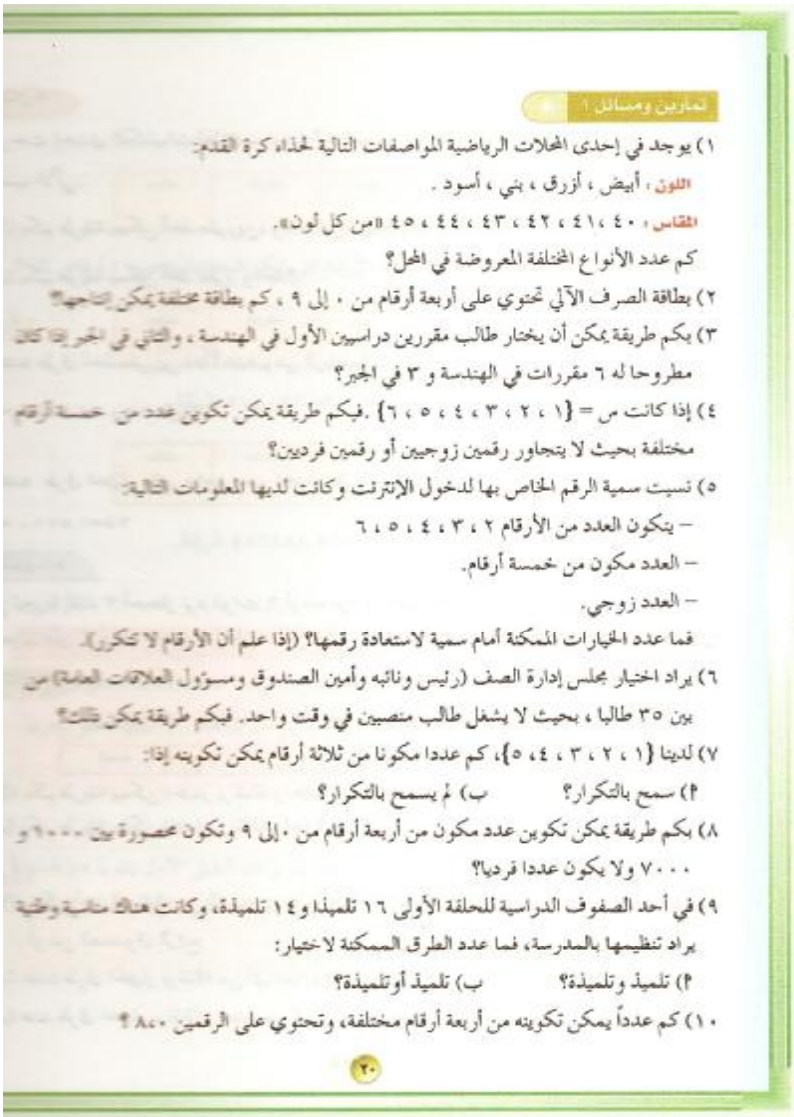
= ٢٩٩٩ طريقة

٩) أ) عدد الطرق = ١٦ × ١٤ = ٢٢٤ طريقة

ب) عدد الطرق = ١٦ + ١٤ = ٣٠ طريقة

١٠) (١ × ١ × ٨ × ٧) × ٩ = ٥٦ × ٩

= ٥٠٤ عدداً



تمارين ومسائل ١

١) يوجد في إحدى المحلات الرياضية المواصفات التالية لحذاء كرة القدم:

اللون : أبيض ، أزرق ، بني ، أسود .

المقاس : ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ «من كل لون».

كم عدد الأنواع المختلفة المعروضة في المحل؟

٢) بطاقة الصرف الآلي تحتوي على أربعة أرقام من ٠ إلى ٩ ، كم بطاقة مختلفة يمكن إنتاجها؟

٣) بكم طريقة يمكن أن يختار طالب مقررين دراسيين الأول في الهندسة ، والثاني في الجبر إذا كان مطروحا له ٦ مقررات في الهندسة و ٣ في الجبر؟

٤) إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} .فبكم طريقة يمكن تكوين عدد من خمسة أرقام مختلفة بحيث لا يتجاور رقمين زوجيين أو رقمين فرديين؟

٥) تسيت سمية الرقم الخاص بها لدخول الإنترنت وكانت لديها المعلومات التالية:

– يتكون العدد من الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

– العدد مكون من خمسة أرقام.

– العدد زوجي.

فما عدد الخيارات الممكنة أمام سمية لاستعادة رقمها؟ (إذا علم أن الأرقام لا تتكرر).

٦) يراد اختيار مجلس إدارة الصف (رئيس ونائبه وأمين الصندوق ومسؤول العلاقات العامة) من بين ٣٥ طالبا ، بحيث لا يشغل طالب منصبين في وقت واحد. فبكم طريقة يمكن ذلك؟

٧) لدينا {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}، كم عددا مكونا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه إذا:

أ) سمح بالتكرار؟ ب) لم يسمح بالتكرار؟

٨) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام من ٠ إلى ٩ وتكون محصورة بين ٦٠٠٠ و ٧٠٠٠ ولا يكون عددا فرديا؟

٩) في أحد الصفوف الدراسية للحلقة الأولى ١٦ تلميذا و ١٤ تلميذة، وكانت هناك مناسبة وطنية يراد تنظيمها بالمدرسة، فما عدد الطرق الممكنة لاختيار:

أ) تلميذ وتلميذة؟ ب) تلميذ أو تلميذة؟

١٠) كم عدداً يمكن تكوينه من أربعة أرقام مختلفة، وتحتوي على الرقمين ٨،٠ ؟

٢٠

لدينا ٩ حالات مختلفة لموقع ٠ ، ٨ معاً في أربع خانات أنظر الجدول ولكل من هذه الحالات ٨ × ٧ حالة لملء الخانتين الأ

	آحـــاد	عشـــرات	مـئـات	ألـــوف
(١)	٠	٨		
(٢)	٠		٨	
(٣)	٠			٨
(٤)		٠	٨	
(٥)		٠		٨
(٦)	٨	٠		
(٧)			٠	٨
(٨)		٨	٠	
(٩)	٨		٠	

١١) الأعداد الخالية من الصفر

= (٩ × ١ × ٨) × ٣ = ٢١٦

الأعداد التي بها صفرا واحدا = ١٨

الأعداد التي بها صفران = ٩

الأعداد = ٢١٦ + ١٨ + ٩ = ٢٤٣

١٢) م) ٦ × ٦ = ٣٦

ب) ① ٦

② ٣٦ – ٦ = ٣٠

جـ) {(٢،٢) ، (٣،٢) ، (٤،٢) ، (٥،٢) ، (٦،٢) ،
(٢،٣) ، (٣،٣) ، (٤،٣) ، (٥،٣) ، (٦،٣) ،
(٢،٤) ، (٣،٤) ، (٤،٤) ، (٥،٤) ، (٦،٤) ،
(٢،٥) ، (٣،٥) ، (٤،٥) ، (٥،٥) ، (٦،٥) ،
(٢،٦) ، (٣،٦) ، (٤،٦) ، (٥،٦) ، (٦،٦)}

د) {(١،١) ، (٢،١) ، (٣،١) ، (٤،١) ، (٥،١) ،
(٦،١) ، (١،٢) ، (١،٣) ، (١،٤) ، (١،٥) ،
(١،٦)}

١٣) $٢٦^{٦} + ٢٦^{٥} \times ١٠ \times ٦ + ٢٦^{٤} \times ١٠^{٢} \times ١٥$

١٠) كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام، ويكون فيها رقما مكتوبا مرتين؟

١١) إذا تم رمي حجري نرد ذي ستة أوجه، أجب عما يأتي:

أ) كم عدد النتائج الممكنة؟

ب) ما عدد النتائج التي يكون فيها الرقمين الظاهرين:

١) متساويين ٢) مختلفين.

جـ) اكتب النتائج التي لا تشتمل على الرقم ١ .

د) اكتب النتائج التي تشتمل على الرقم ١ على الأقل مرة واحدة.

١٢) يراد إنتاج بطاقات تحتوي كل منها على ٦ رموز (أرقام وحروف إنجليزية). فكم بطاقة يمكن إنتاجها بحيث يكون فيها رقمين على الأكثر؟

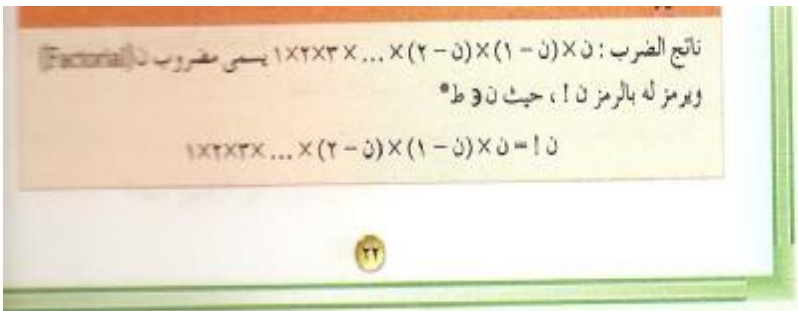
هناك ٦ حالات مختلفة لوجود رقم واحد في الخانات ٦ ، ويوجد ١٥ حالة مختلفة لوجود رقمين وهي :

الحالات \ الخانة	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	ر	ر				
٢	ر		ر			
٣	ر			ر		
٤	ر				ر	
٥	ر					ر
٦		ر	ر			
٧		ر		ر		
٨		ر			ر	
٩		ر				ر
١٠			ر	ر		
١١			ر		ر	
١٢			ر			ر
١٣				ر	ر	
١٤				ر		ر
١٥					ر	ر

حل تدريب ١

عدد الطرق = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٧٢٠



ناتج الضرب : ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١ يسمى مضروب ن (Factorial)
ويرمز له بالرمز ن ! ، حيث ن ∈ ط*

ن ! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١

٢٢

إثـــراء

اثبت أن :

١٠٠ ! = (١ × ٣ × ٥ × ٧ × ... × ٩٩) × ٢^٥٠ × ٥٠ !

الحـــل

الطرف الأيسر = (١ × ٣ × ٥ × ... × ٩٩) × (٢ × ٢ × ... × ٢) × (١ × ٢ × ٣ × ... × ...)
(٥٠ مـرة)

= (١ × ٣ × ٥ × ... × ٩٩) × (١ × ٢) (٢ × ٢) (٣ × ٢) ... (... × ٢)

= (١ × ٣ × ٥ × ... × ٩٩) × (٢ × ٤ × ٦ × ٨ × ... × ١٠٠)

= (١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ... × ٩٩ × ١٠٠) = ١٠٠ ! = الطرق

حل تدريب ٢

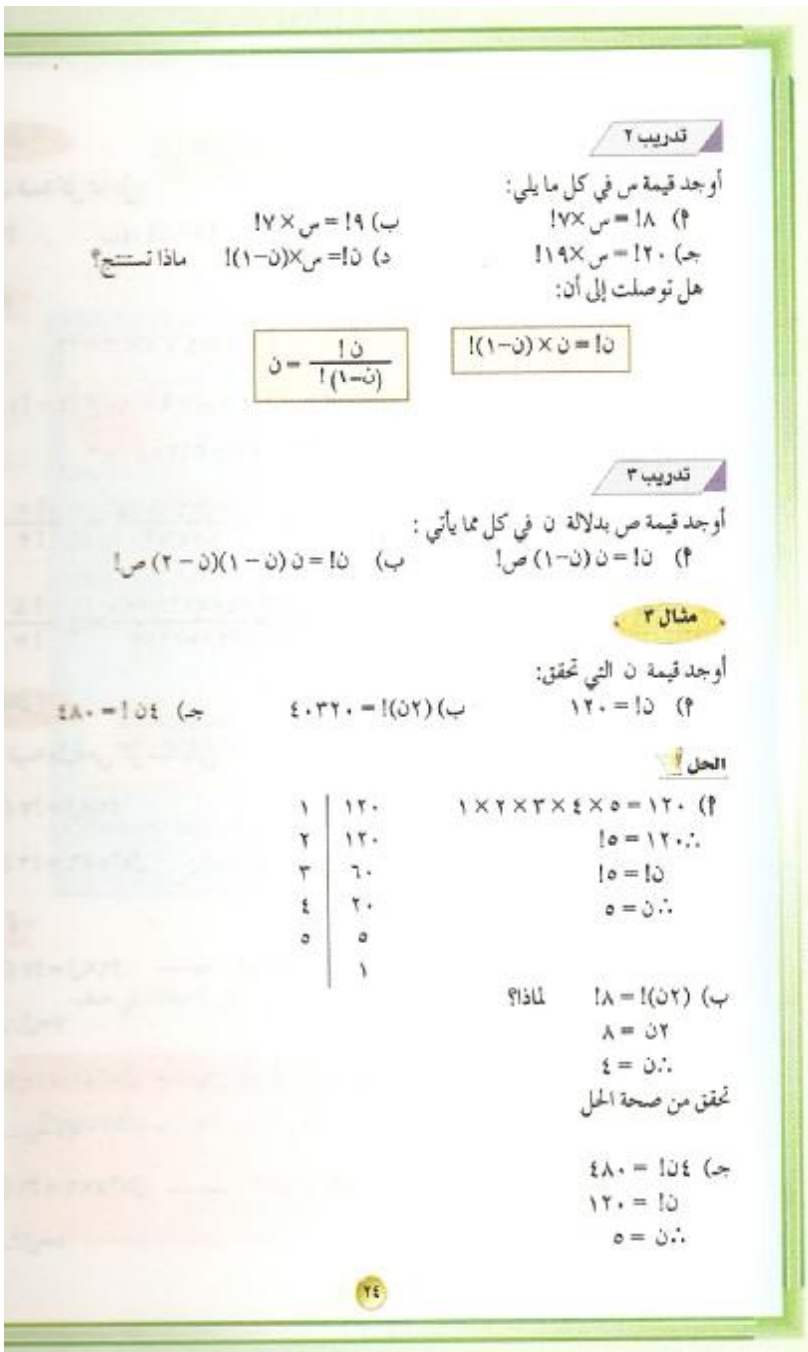
أ) ٨ ب) ٩ × ٨
جـ) ٢٠ د) ن

حل تدريب ٣

أ) ص = (ن − ٢)
ب) ص = (ن − ٣)

- من خلال مثال ٣ يمكنك توضيح المسائل المختلفة التي تحتوي على المضروب.
- يمكن حل الجزئية أ من خلال البدء بالضرب من الرقم ١ حتى الوصول إلى الناتج ومنه يمكن معرفة العدد المطلوب.
- بالنسبة للجزئية «ب» اترك فرصة للطلاب لتحليل العدد ٤٠٣٢٠ إلى عواملـه، ويمكن إرشادهم للبدء بأصغر العوامل «٢» وبحيث يزيد واحداً في كل مرة كلما كان ذلك ممكناً حتى يسهل استنتاج المطلوب كما بالشكل :

٢	٤٠٣٢٠
٣	٢٠١٦٠
٤	٦٧٢٠
٥	١٦٨٠
٦	٣٣٦
٧	٥٦
٨	٨
	١



تدريب ٢

أوجد قيمة س في كل مما يلي:
أ) ١٨! = س × ٧!
ب) ١٩! = س × ٧!
جـ) ٢٠! = س × ١٩!
د) ن! = س × (ن − ١)! ماذا تستنتج؟

هل توصلت إلى أن:

ن! = ن × (ن − ١)!

ن = ن! / (ن − ١)!

تدريب ٣

أوجد قيمة ص بدلالة ن في كل مما يأتي :
أ) ن! = ن (ن − ١) ص!
ب) ن! = ن (ن − ١)(ن − ٢) ص!

مثال ٣

أوجد قيمة ن التي تحقق:
أ) ن! = ١٢٠
ب) (ن٢)! = ٤٠٣٢٠
جـ) ٤ن! = ٤٨٠

الحل

أ) ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

١	١٢٠
٢	١٢٠
٣	٦٠
٤	٢٠
٥	٥
	١

∴ ١٢٠ = ٥!
∴ ن! = ٥!
∴ ن = ٥

ب) (ن٢)! = ٨! لماذا؟
ن٢ = ٨
∴ ن = ٤
تحقق من صحة الحل

جـ) ٤ن! = ٤٨٠
ن! = ١٢٠
∴ ن = ٥

٢٤

إثـــراء

كم بطاقة يمكن عملها بحيث كل منها تحتوي ٣ رموز (أرقام وحروف هجائية)، ويكون هنالك حرف واحد على الأقل ؟

٢٨ × ١٠ × ١٠ × ٣ + ٢٨ × ٢٨ × ١٠ × ٣ + ٢٨ × ٢٨ × ٢٨ =

٨٤٠٠ + ٢٣٥٢٠ + ٢١٩٥٢ = ٥٣٨٧٢ بطاقة

حل تدريب ٤

أ) (ن + ٤) (ن + ٣)

ب) ن (ن + ٢)

- من خلال المثال ٤ وضح للطلاب أن استخدام الآلة الحاسبة هو لاختصار الوقت والجهد.
- قد تختلف أنواع الحاسبات المستخدمة ويترك للطالب طريقة التعامل مع حاسبته.
- في بعض العمليات البسيطة لا تدع الطلاب يستخدمون الآلة الحاسبة وذلك حتى لا يتم الاعتماد عليها كلياً وحتى تكون لدى الطالب مهارة في إجراء العمليات الحسابية.

حل تدريب ٥

أ) $\approx$ ٢,٤٣٢٩٠ × $١٠^{١٨}$

ب) $\approx$ ٦,٧٠٤٤٢ × $١٠^{١١}$

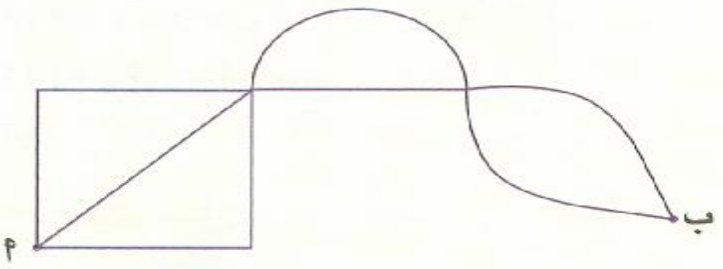
حـ) ٣٢٤٣٢٤٠١

د) ٢٥٥٠٢٤

إعادة تعلم

في الشكل المقابل، تحقق من أن عدد الطرق للتحرك من النقطة أ إلى النقطة ب هي $\frac{٤!}{٢!}$

ويشترط في كل طريق أن لا يتم المرور في الخط إلا مرة واحدة.



حل تدريب ٦

عدد الطرق = ٨ !

إثـــراء

أ) بكم صفر ينتهي ١٠٠ !؟

ب) إذا كان أ ، ب أعداد صحيحة موجبة فوضح صحة أو عدم صحة كل من :

١) أ ! + ب ! = ب ! + أ !

٢) (أ ب) ! = أ ! ب !

٣) (أ !) ! = (أ !)^{٢}

الحـــل

أ) ٢٤ صفراً

تعزيـــز

أوجد قيمة $\frac{(٥!)^{٢}}{١٦! \times ٤!}$

الحـــل

$$\frac{(٥!)^{٢}}{١٦! \times ٤!} = \frac{٥! \times ٥! \times ٤}{٦ \times ١٥! \times ٤!}$$

$$= \frac{٥}{٦}$$

إعادة تع

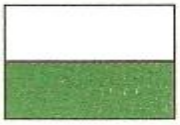
أراد مـزارع غـرس
شجيرات مختلفة
في صف يحتوي على
أمـاكن للـزراعة
طريقة يمكنه ذلك؟

حل تدريب ٧

عدد الأعداد = ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٢٤ عدد

- في النشاط ٢ قسم الطلاب إلى مجموعات ووزع الألوان على كل مجموعة ٤ أشرطة مختلفة.
- اطلب منهم تنفيذ خطوات النشاط وتابع النتائج التي يحصلون عليها ووجّههم إلى طريقة تطبيق النشاط.
- تذكر أن ترتيب الألوان يختلف إذا كان في الأعلى أو الأسفل أي أن :



لا يشابه

- في إكمال الجدول أكد على استخدام مبدأ العد.
- قد لا يصل الطلاب إلى القاعدة في صورتها النهائية ولذلك يجب أن تتعرف على ما توصلوا إليه واطلب إليهم حل التدريب.

حل تدريب ٨

أ) (روسيا وهولندا ويوغسلافيا ولوكسمبورج)، (لتوانيا وبوليفيا)، (هنغاريا وبلغاريا)

ب) عدد الأعداد = ٤ × ٣ = ١٢ ، أي : $ل_{٢}^{٤}$

- يمكنك إعطاء المثال التالي :

إذا أردنا اختيار ٤ كتب من بين ٩ كتب مختلفة، وترتيبها على رف، فبكم طريقة يمكن القيام بالعمل؟

الحل

$ل_{٩}^{٩} = \frac{!٩}{\quad} = ٣٠٢٤$

تدريب ٩

أ) أوجد قيمة:

١) $ن ل_{ن}$.

٢) $ن ل_{١}$

٣) $ن ل_{ن}$

ب) تحقق باستخدام النتيجة التي حصلت عليها في (أ) الجزئية (٣) أن ٠ ! = ١

مثال ٨

يراد اختيار (رئيس ونائب رئيس) لمجلس إدارة جماعة الإدارة الطلابية من بين أربعة طلاب (أسعد، باسم، جابر، داؤود) بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل

نرمز للطلاب الأربعة أسعد، باسم، جابر، داؤود بالرموز أ، ب، جـ، د على الترتيب، فإن النتائج الممكنة:

(أ، ب) (أ، جـ) (أ، د) (ب، أ) (ب، جـ) (ب، د)

(جـ، أ) (جـ، ب) (جـ، د) (د، أ) (د، ب) (د، جـ)

(أ، ب) تعني أ: الرئيس، ب: نائب الرئيس، (ب، أ) تعني ب: الرئيس، أ: نائب الرئيس

جميعها تباديل ٤ طلاب مأخوذ طالبين في كل مرة (رئيس ونائبه) عددها = ١٢ حسب مبدأ العد

عدد طرق اختيار الرئيس = ٤ طرق ، عدد طرق اختيار نائب الرئيس = ٣ طرق.

∴ عدد طرق اختيار الرئيس ونائبه = ٤×٣ = ١٢

وحسب القاعدة السابقة لتباديل ن من العناصر مأخوذة (ر) في كل مرة $ن ل_{ر} = \frac{!٤}{!١٢}$ = ٤×٣=١٢

تدريب ١٠

إذا كانت لدينا مجموعة تضم ٨ طلاب ويراد اختيار لاعب كرة تنس، ولاعب كرة مضرب، ولاعب كرة ريشة. بكم طريقة يمكننا ذلك؟

حل تدريب ٩

أ) ١) ١

٢) ن

٣) ن !

ب) $ن! = ن ل_{ن} = \frac{ن !}{(ن - ن) !}$

$= \frac{ن !}{!٠}$ ن !

$\therefore !٠ = \frac{ن !}{ن !} = ١$

حل تدريب ١٠

$٨ ل_{٣} = ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٣٦$

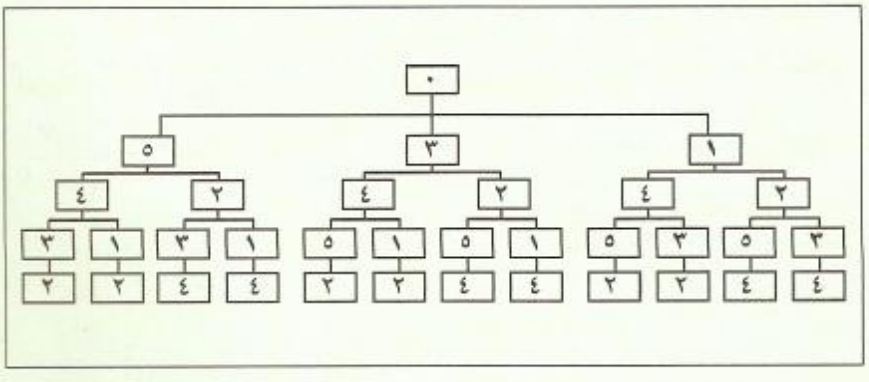
- يمكنك أن تؤكد التفريق (أ، ب) ، (ب ، أ) من خلال الأزواج المرتبة حيث أن (٢ ، ٣) ≠ (٣ ، ٢).

إثـــراء

من خلال مخطط الشجرة الموضح كون مسألة رياضية تعبر عن المخطط وقم بحلها.

الحـــل

إذا كانت لدينا المجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} فبكم طريقة يمكن تكوين عدد فردي من أربعة أرقام مختلفة ولا يكون أي رقمين متجاورين فرديين معاً أو زوجيين معاً ؟



الجواب : عدد الطرق = ٣ × ٢ × ٢ × ١

= ١٢

- بين للطلاب كيفية استخدام الآلة الحاسبة لحساب التباديل.

حل تدريب ١١

أ) ٦ ب) ١٨٠ جـ) ٧٢٠

- عند عرض المثال ١٠ على الطلاب ركز على توضيح العملية أمام الطلاب وداخل غرفة الصف كذلك ذكرهم بما تم أخذه في استخدام أو ، و .
- شجع الطلاب على إيجاد الحل بطريقة أخرى:

الاختيار لدى أول شخص من الآباء ٤ فرص.
الاختيار لدى ثاني شخص من الآباء ٣ فرص.
الاختيار لدى ثالث شخص من الآباء فرصتان.
الاختيار لدى رابع شخص من الآباء فرصة واحدة.
الاختيار لدى أول شخص من الطلاب ٤ فرص.
الاختيار لدى أول شخص من الطلاب ٣ فرص.
الاختيار لدى أول شخص من الطلاب فرصتان
الاختيار لدى أول شخص من الطلاب فرصة واحدة.

العدد = $٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$= ٥٧٦$

عدد الطرق = ٥٧٦×٢

$= ١١٥٢$

تعزيز

أوجد قيمة ن التي تحقق :

$^{٧}ل_{ن} = \frac{٧}{٤} \, ^{٤}ل_{ن+١}$

الحل

$^{٧}ل_{ن} = \frac{٧}{٤} \, ^{٤}ل_{ن+١}$

$\frac{!٧}{!(٧-ن)} = \frac{٧}{٤} \times \frac{!٤}{!(٤-ن-١)}$

$\frac{!٧}{!(٧-ن)} = \frac{!٣ \times ٧}{!(٣-ن)}$

$\frac{!٦}{!(٧-ن)} = \frac{!٣}{!(٣-ن)}$

$\frac{١}{١} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{(٧-ن)(٦-ن)(٥-ن)(٤-ن)}$

$(٧-ن)(٦-ن)(٥-ن)(٤-ن) = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

أي : $(٧-ن) = ٥ \Leftarrow ن = ٢$

للتحقق : عندما ن = ٢

$^{٧}ل_{ن} = ٤٢$ ، $\frac{٧}{٤} \, ^{٤}ل_{٣} = ٢٤ \times \frac{٧}{٤} = ٤٢$

مثال ٩

بكم طريقة يمكن لخمسة أشخاص الجلوس على تسعة مقاعد موضوعة على استقامة واحدة؟

الحل

سيتم إشغال ٥ مقاعد من بين ٩ مقاعد بطرق متعددة.

∴ عدد الطرق الممكنة = $^{٩}ل_{٥}$

$= \frac{!٩}{!٤} = ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥$

$= ١٥١٢٠$ طريقة

ولإيجاد القيمة السابقة باستخدام الآلة الحاسبة نضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليمين إلى اليسار

9	Shift	nPr	5	=

فيظهر على الشاشة العدد 15120

∴ $^{٩}ل_{٥} = ١٥١٢٠$

تدريب ١١

أوجد قيمة كل مما يلي :

أ) $\frac{^{٩}ل_{٤}}{^{٩}ل_{٣}}$ ب) $^{٦}ل_{٥} \times ٤$ جـ) $^{٥}ل_{٣} \times ^{٥}ل_{٤}$

مثال ١٠

في اجتماع مجلس الآباء بإحدى المدارس حضر أربعة طلاب مع آبائهم ،بكم طريقة يمكن ترتيبهم في صف على استقامة واحدة يحوي ٨ مقاعد بحيث يجلس الآباء متجاورين والطلاب متجاورين؟

الحل

هناك حالتان للجلوس : يمكن أن يجلس الآباء على المقاعد الأربعة الأولى والطلاب يجلسون على المقاعد الأربعة الأخيرة أو يجلس الطلاب على المقاعد الأربعة الأولى والآباء يجلسون على المقاعد الأربعة الأخيرة.

الآباء				الطلاب				أو	الطلاب				الآباء			
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨

عدد الطرق = $!٤ \times !٤ + !٤ \times !٤$

$= ٥٧٦ + ٥٧٦ = ١١٥٢$ طريقة

حل تدريب ١٢

أ) $٧ \times ٦ \times ٥ = ٢١٠$

ب) $٩ \times ٨ = ٧٢$

جـ) $٢٥ \times ٢٤ \times ٢٣ = ١٣٨٠٠$

- من خلال طرح المثال ٨ وضح للطلاب المسائل المتنوعة والمختلفة التي تستخدم ${}^{ن}ل_{ر}$.

- يمكنك عرض المزيد من المسائل المشابهة مثلاً:

أ) تحقق مما يأتي :

$${}^{٥}ل_{٥} = {}^{٥}ل_{١} + ٥ !$$

$${}^{٣}ل_{٢} = {}^{٣}ل_{١} - {}^{٢}ل_{١}$$

ب) أوجد قيمة ن لكل مما يأتي :

$${}^{ن}ل_{٢} - \frac{ن !}{(ن - ١)!} = (ن - ٢) !$$

حل تدريب ١٣

٣ ! = ٦

حل تدريب ١٤

عدد الطرق = (٧ − ١)! = ٦! = ٧٢٠ طريقة

إثـــراء

بكم طريقة يمكن تنظيم جلوس أ، ب ، جـ ، د ، هـ حـول طاولـة مستديـرة بحيـث يكـون أ ، ب متجاورين؟

الحـــل

عدد الطرق = ٢ × ٣ ! = ١٢

عدد تباديل (ن) من العناصر تحوي (م) من العناصر المتشابهة فيما بينها، و(ل) من العناصر الأخرى المتشابهة فيما بينها = $\frac{\text{ن!}}{\text{م! ل!}}$

مثال ١٣

أوجد عدد تباديل حروف كلمة (قسطنطينية).

الحل

عدد تباديل الحروف = $\frac{١٩}{١٢ \times ١٢ \times ١٢}$ لماذا؟

$= \frac{٣٦٢٨٨٠٠}{٨} = ٤٥٣٦٠$

حرف ن مكتوب مرتين
حرف ط مكتوب مرتين
حرف ي مكتوب مرتين

٣٣

إجابات النشاط

١) ٤ ! = ٢٤

٢) ١٢ نعم

٣) لوجود شريطين متشابهين.

ـ قم بإعطاء الطلاب النتيجة مع التنبيه إلى أن م ، ل هي أعداد العناصر المتشابهة من النوعين وقد تكون أكثر من ذلك.

حل تدريب ١٥

م) ٦٠

ب) ٦

تعزيز

أرادت سميرة زرع ١١ وردة في صف. فبكم طريقة يمكنها ذلك إذا كان لديها ٤ وردات حمراء، ٥ صفراء، وأرجوانيتان؟

الحل

$\frac{!١١}{!٢ \times !٥ \times !٤} = ٦٩٣٠$

إثراء

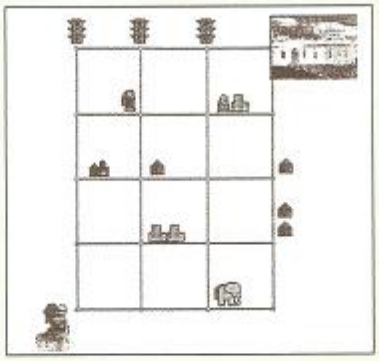
طريقة يمكن لمحمد الوصول إلى منزله علماً بأنه يجب عليه إما السير أفقياً إلى اليمين أو رأسياً إلى الأعلى ؟

الحل

تباديل عناصر بعضها متشابه

(ي ، ي ، ي ، ع ، ي ، ي ، ي)

$= \frac{!٧}{!٤ \times !٣} = ٣٥$



- اعط أمثلة متعددة تتضمن مقاماً به أكثر من عددين مضروبين، كما في تدريب ١٧ .

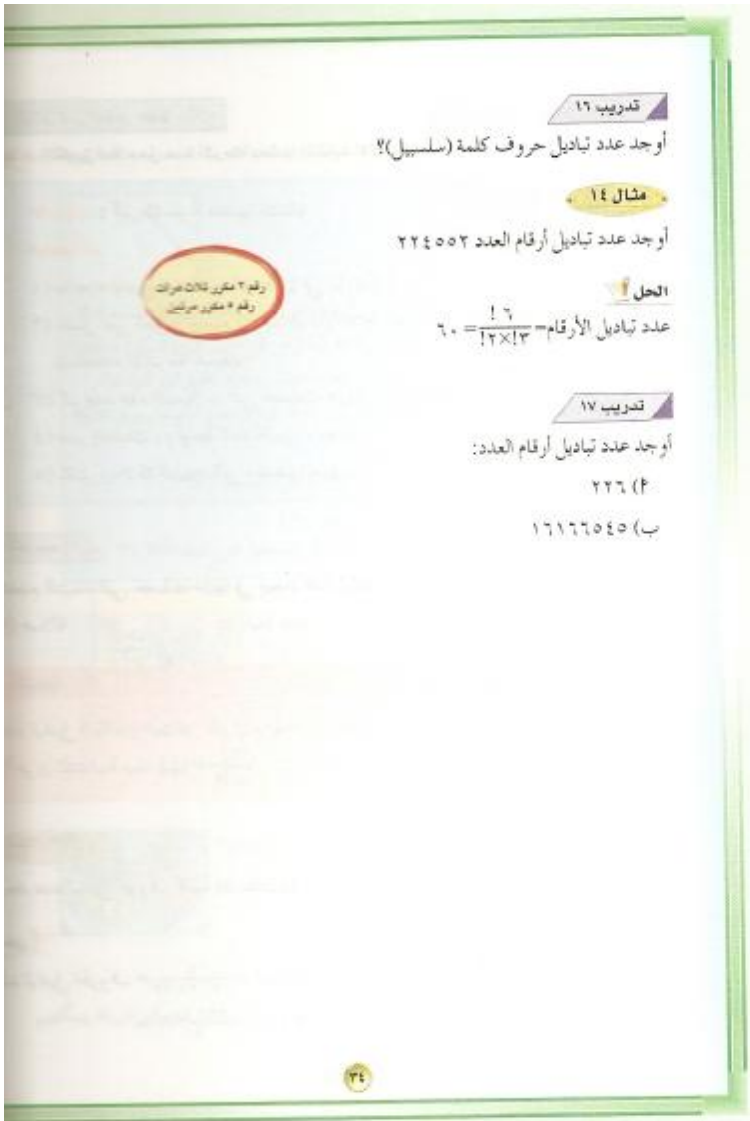
حل تدريب ١٦

١٨٠

حل تدريب ١٧

أ) ٣

ب) ١٦٨٠



تدريب ١٦

أوجد عدد تباديل حروف كلمة (سلسبيل)؟

مثال ١٤

أوجد عدد تباديل أرقام العدد ٢٢٤٥٥٢

رقم ٢ مكرر ثلاث مرات
رقم ٥ مكرر مرتين

الحل :

عدد تباديل الأرقام = $\frac{!٦}{!٢ \times !٣}$ = ٦٠

تدريب ١٧

أوجد عدد تباديل أرقام العدد:

أ) ٢٢٦

ب) ١٦١٦٦٥٤٥

٣٤

إعادة تعلم

أوجد عدد الكلمات التي يمكن تكوينها باستخدام أحرف كلمة :

أ) باب

ب) ثرثار

إثـــراء

كم عدداً طبيعياً مكوناً من ٥ أرقام، وحاصل ضرب أرقامه ٢٠٠٠ ؟

الحـــل

$٢٠٠٠ = ٢^{٤} \times ٥^{٣}$

لدينا : □ □ □ □ □

(٣ خمسات ، ٢ ، ٨)

(٣ خمسات ، ٤ ، ٤)

عدد الأعداد = $\frac{!٥}{!٣} + \frac{!٥}{!٢ !٣}$

= ٢٠ + ١٠ = ٣٠ عدداً

حل تدريب ٢

أ) ١
ب) ٣٣٠
جـ) ٦

- يمكنك الطلب إلى الطلاب التعويض في القانون بقيم معينة مثل :

ن = ٦ ، ر = ٧ أو ن = ٢ ، ر = −٤

فإن الجواب سيكون عبارة عن كسر مما يساعدهم ذلك على فهم القانون بصورة أفضل وأعمق.

حل تدريب ٣

أ) ١
ب) ٢ ن
جـ) $\frac{ن^{٢} + ن}{٢}$

إعادة تعلم

هل :

$$\frac{\frac{!٥}{!٣}}{!٢} = \frac{!٥}{!٢ \times !٣} \; ؟$$

الحل

نعم

حل تدريب ٤

عدد الطرق = $\binom{١٥}{٢} = ١٠٥$

إثـــراء

إذا كان $\binom{ن}{ر} > \binom{ن}{ر-١}$ فاثبت أن $ر < \frac{ن+١}{٢}$

الحـــل

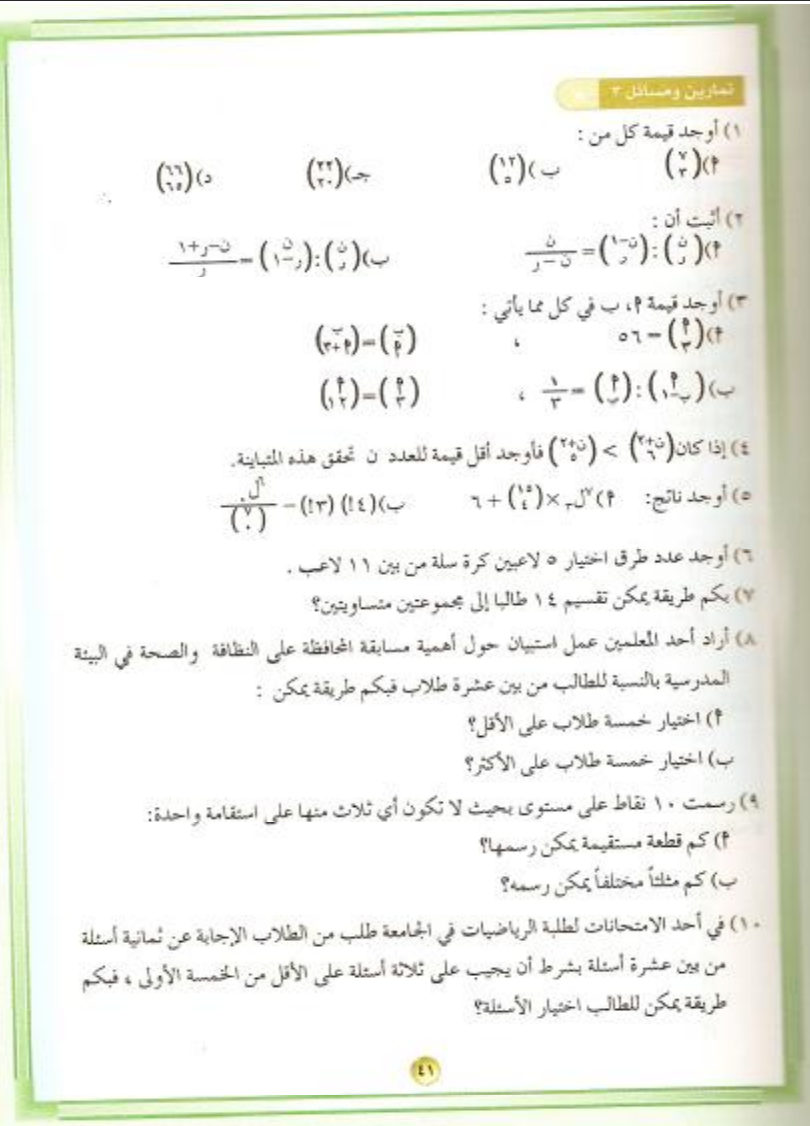
$\therefore \binom{ن}{ر} > \binom{ن}{ر-١}$

$\therefore \frac{\binom{ن}{ر}}{\binom{ن}{ر-١}} > ١$

$\therefore \frac{ن-ر+١}{ر} > ١$

$\therefore ٢ر < ن+١$

$\therefore ر < \frac{ن+١}{٢}$



تمارين ومسائل ٣

١) أوجد قيمة كل من :

أ) $\binom{٧}{٣}$ ب) $\binom{١٢}{٥}$ جـ) $\binom{٢٢}{٢٠}$ د) $\binom{١٦٦}{١٦٥}$

٢) أثبت أن :

أ) $\binom{ن}{ر} : \binom{ن-١}{ر} = \frac{ن}{ن-ر}$ ب) $\binom{ن}{ر} : \binom{ن}{ر-١} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

٣) أوجد قيمة أ، ب في كل مما يأتي :

أ) $\binom{أ}{٣} = ٥٦$ ، $\binom{أ}{٣} = \binom{أ}{أ+ب}$

ب) $\binom{أ}{ب} : \binom{أ}{ب-١} = \frac{٥}{٣}$ ، $\binom{أ}{٣} = \binom{أ}{١٢}$

٤) إذا كان $\binom{ن+٢}{٥} > \binom{ن+٢}{٦}$ فأوجد أقل قيمة للعدد ن تحقق هذه المتباينة.

٥) أوجد ناتج: أ) $\binom{١٥}{٤} \times \binom{٤}{٣} + ٦$ ب) $\frac{(١٣)!\,(١٤)!}{\binom{٧}{٥}}$

٦) أوجد عدد طرق اختيار ٥ لاعبين كرة سلة من بين ١١ لاعب .

٧) بكم طريقة يمكن تقسيم ١٤ طالبا إلى مجموعتين متساويتين؟

٨) أراد أحد المعلمين عمل استبيان حول أهمية مسابقة المحافظة على النظافة والصحة في البيئة المدرسية بالنسبة للطالب من بين عشرة طلاب فبكم طريقة يمكن :

أ) اختيار خمسة طلاب على الأقل؟

ب) اختيار خمسة طلاب على الأكثر؟

٩) رسمت ١٠ نقاط على مستوى بحيث لا تكون أي ثلاث منها على استقامة واحدة:

أ) كم قطعة مستقيمة يمكن رسمها؟

ب) كم مثلثاً مختلفاً يمكن رسمه؟

١٠) في أحد الامتحانات لطلبة الرياضيات في الجامعة طلب من الطلاب الإجابة عن ثمانية أسئلة من بين عشرة أسئلة بشرط أن يجيب على ثلاثة أسئلة على الأقل من الخمسة الأولى ، فبكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة؟

٤١

حل تمارين ومسائل ٣

١) أ) ٣٥ ب) ٧٩٢

جـ) ٢٣١ د) ٦٦

٢) أ) الطرف الأيمن

$$= \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \div \frac{(ن-١)!}{ر!\,(ن-ر-١)!}$$

$$= \frac{ن\,(ن-١)!}{ر!(ن-ر)\,(ن-ر-١)!} \times \frac{ر!\,(ن-ر-١)!}{(ن-١)!}$$

$$= \frac{ن}{ن-ر} = \text{الطرف الأيسر}$$

ب) الطرف الأيمن :

$$= \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \div \frac{ن!}{(ر-١)\,(ن-ر+١)!}$$

$$= \frac{ن!}{ر(ر-١)\,(ن-ر)!} \times \frac{(ر-١)!(ن-ر+١)(ن-ر)!}{ن!}$$

$$= \frac{ن-ر+١}{ر} = \text{الطرف الأيسر}$$

٣) أ) أ = ٨ ، ب = ١٩

ب) أ = ١٥ ، ب = ٨

٤) $\frac{(ن+٢)!}{٦!\,(ن-٤)!} < \frac{(ن+٢)!}{٥!\,(ن-٣)!}$

$$\frac{(ن-٢)!}{٦!\,(ن-٤)!} \times \frac{٥!\,(ن-٣)!}{(ن+٢)!} < ١$$

$$\frac{ن-٣}{٦} < ١$$

ن < ٩ ن = ١٠

٥) أ) ٢٨٦٦٥٦

ب) ١٤٣

٦) $\binom{١١}{٥}$ = ٤٦٢ طريقة

٧) عدد الطرق = $\frac{١٤!}{٧! \times ٧!}$

= ٣٤٣٢

٨)

أ) $\binom{١٠}{٥} + \binom{١٠}{٦} + \binom{١٠}{٧} + \binom{١٠}{٨} + \binom{١٠}{٩} + \binom{١٠}{١٠}$ = ٦٣٨ طريقة

ب) $\binom{١٠}{٠} + \binom{١٠}{١} + \binom{١٠}{٢} + \binom{١٠}{٣} + \binom{١٠}{٤} + \binom{١٠}{٥}$ = ٦٣٨ طريقة

٩)

أ) $\binom{١٠}{٢}$ = ٤٥ قطعة ب) $\binom{١٠}{٣}$ = ١٢٠ مثلث

١٠) ثلاثة من الخمسة الأولى وخمسة من الخمسة الثانية أو أربعة من الخمسة الأولى وأربعة من الخمسة الثانية أو خمسة من الخمسة الأولى وثلاثة من الخمسة الثانية.

∴ عدد الطرق

$$= \binom{٥}{٣} \times \binom{٥}{٥} + \binom{٥}{٤} \times \binom{٥}{٤} + \binom{٥}{٥} \times \binom{٥}{٣}$$

= ٤٥ طريقة

١١)

ب) $ن^{٣} - {}_{ن+١}ل_{٣} = \binom{ن}{١}$

توضيح :

في العمود الأول : $ن^{٣}$

في العمود الثاني : ${}_{ن+١}ل_{٣}$

في العمود الثالث : ن

١٢) عدد المباريات $= \binom{٧}{٢} = ٢١$ مباراة

١٣)

$$= \frac{\cancel{(ن-ر)!}}{(م-ر)!\,(ن-م)!} \times \frac{ن!}{\cancel{(ن-ر)!}\,ر!}$$

$$= \frac{١}{(م-ر)!\,ر!} \times \frac{ن!}{(ن-م)!}$$

$$= \frac{م!}{(م-ر)!\,ر!} \times \frac{ن!}{(ن-م)!\,م!}$$

$$\binom{م}{ر}\binom{ن}{م}$$

حل تدريب ١

أ) $(\text{ن} - ١) + (\text{ن} - ١) = ١ + (\text{ن} - ١) =$

$\text{ن} = \binom{\text{ن}}{١}$

ب) $\binom{\text{ن}-١}{\text{ن}-٢} + \binom{\text{ن}-١}{\text{ن}-١} = \frac{(\text{ن}-١)!}{(\text{ن}-٢)!} + \frac{(\text{ن}-١)!}{(\text{ن}-١)!}$

$= \frac{(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)! + (\text{ن}-٢)!}{(\text{ن}-٢)!} = \frac{(\text{ن}-٢)![(\text{ن}-١)+١]}{(\text{ن}-٢)!}$

$= \text{ن} = \binom{\text{ن}}{\text{ن}-١}$

- اترك الطلاب يكتشفون الملاحظات الخاصة بمثلث باسكال، واتركهم يكملون الجدول أو يقومون بإنشاء مثلث جديد.

حل تدريب ٢

$\text{أ}^{٧} - ٧\text{أ}^{٦}\text{ب} + ٢١\text{أ}^{٥}\text{ب}^{٢} - ٣٥\text{أ}^{٤}\text{ب}^{٣} + ٣٥\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٤} - ٢١\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٥} + ٧\text{أ}\text{ب}^{٦} - \text{ب}^{٧}$

- مثال ٢ يوضح استنتاج نظرية ذات الحدين ويستخدم التوافيق في ذلك.
- اطرح أسئلة من النوع :

* ما العلاقة بين الأس وعدد الحدود ؟
* ما مجموع أسس عاملي كل حد؟
* كيف تتدرج الأسس في الحدود؟

ثم اعطهم تدريبات إضافية مثل اعتمد على إجابات الأسئلة السابقة واكتب مفكوك كل من :

$(\text{أ} + \text{ب})^{٤}$ ، $(\text{أ} + \text{ب})^{٥}$ ، $(\text{أ} + \text{ب})^{٦}$

- وضح للطلاب نظرية ذات الحدين باستخدام رمز المجموع.

حل تدريب ٣

أ) $\binom{ن}{٠} + \binom{ن}{١} س + \binom{ن}{٢} س^{٢} + \cdots + \binom{ن}{ن} س^{ن}$

ب) $\binom{ن}{٠} - \binom{ن}{١} س + \binom{ن}{٢} س^{٢} - \cdots \pm \binom{ن}{ن} س^{ن}$

جـ) $\binom{ن}{٠} + \binom{ن}{١} + \binom{ن}{٢} + \binom{ن}{٣} + \cdots + \binom{ن}{ن}$

يلاحظ أنه في مفكوك :

أ) $(أ + ب)^{ن}$ تكون إشارات الحدود موجبة.

ب) $(أ - ب)^{ن}$ تكون إشارات الحدود متعاقبة.

جـ) $\sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر} = ٢^{ن}$

- اسأل الطلاب في جزئية ب من مثال ٣ عن الحدود السالبة ما أس ب؟ حيث أنه عندما يكون الأس فردياً تكون إشارة الحد سالبة وغير ذلك تكون موجبة وهذا إذا كانت إشارة الحد الأول موجبة عندما يكون أس ب هو الواحد الصحيح الموجب.

إثـــراء

أوجد ناتج ما يلي :

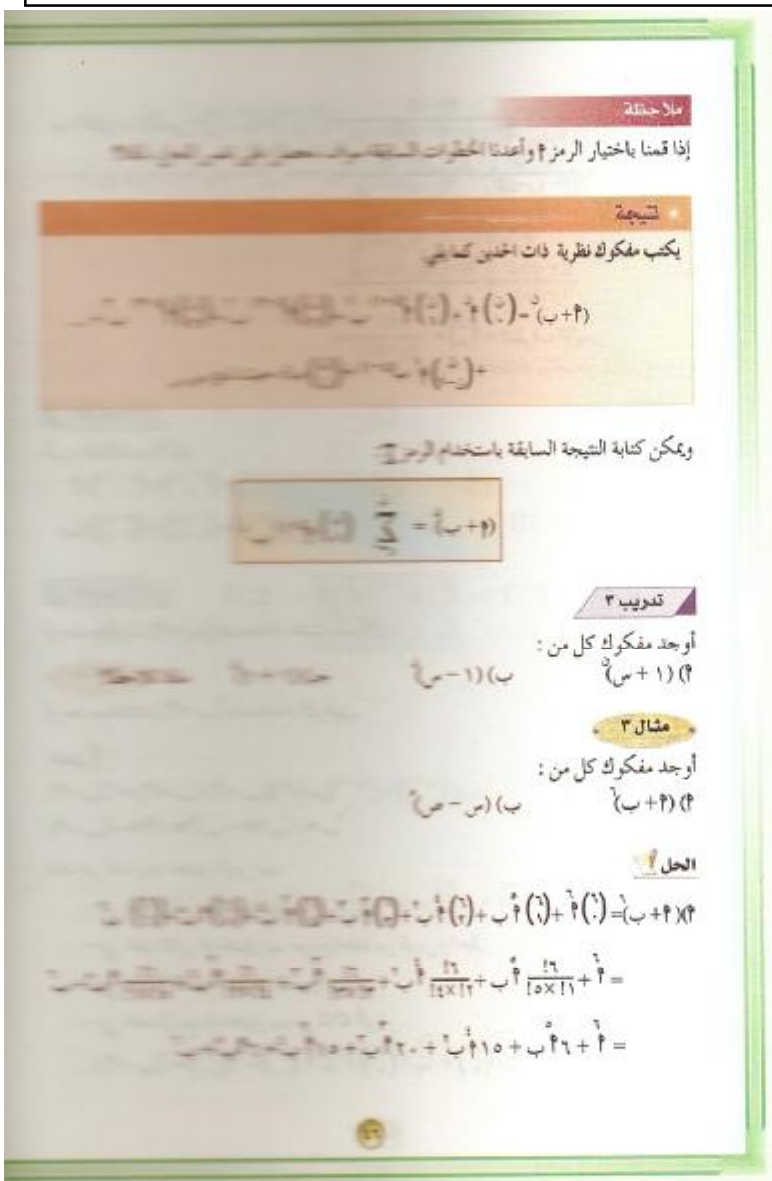
$\sum_{ر=٠}^{٤} ٢ \binom{٤}{ر}$

الحـــل

$\sum_{ر=٠}^{٤} ٢ \binom{٤}{ر} = ٢ \sum_{ر=٠}^{٤} \binom{٤}{ر}$

$= ٢ \times ٢^{٤}$

$= ٣٢$



ملاحظة

إذا قمنا باختيار الرمز أ وأعدنا الخطوات السابقة

نتيجة

يكتب مفكوك نظرية ذات الحدين كما يلي:

ويمكن كتابة النتيجة السابقة باستخدام الرمز

تدريب ٣

أوجد مفكوك كل من :

أ) $(١ + س)^{٥}$ ب) $(١ - س)^{٦}$

مثال ٣

أوجد مفكوك كل من :

أ) $(أ + ب)^{٦}$ ب) $(س - ص)^{٦}$

الحل

تعـزيـــز

أكتب ناتج ما يلي دون إجراء حسابات :

١) $\binom{٥}{٠} + \binom{٥}{١} + \binom{٥}{٢} + \binom{٥}{٣} + \binom{٥}{٤} + \binom{٥}{٥}$

٢) $\binom{٦}{٠} + \binom{٦}{١} + \binom{٦}{٢} + \binom{٦}{٣} + \binom{٦}{٤} + \binom{٦}{٥} + \binom{٦}{٦}$

الحـــل

١) $(١ + ١)^{٥} = ٢^{٥} = ٣٢$

٢) $(١ + ١)^{٦} = ٢^{٦} = ٦٤$

حل تدريب ٤

م) $٢٥٦ + ١٢٨ص + ٢٤ص^{٢} + ٢ص^{٣} + \frac{ص^{٤}}{١٦}$

ب) $١ + ٥س^{٢} + ١٠س^{٤} + ١٠س^{٦} + ٥س^{٨} + س^{١٠}$

جـ) $١ - \frac{٦}{س} + \frac{١٥}{س^{٢}} - \frac{٢٠}{س^{٣}} + \frac{١٥}{س^{٤}} - \frac{٦}{س^{٥}} + \frac{١}{س^{٦}}$

حل تدريب ٦

معامل $ح_{٤} = -٨٤$

- وضع للطلاب أن المقصود بالحد الخالي من المتغير (س مثلاً) هو الحد الذي لا يحتوي على ذلك المتغير (أي المتغير مرفوعاً للقوة صفر) .

حل تدريب ٧

$ح_{٥} = ١٣٤٤٠ س^{٨}$

حل تدريب ٨

عدد الحدود = ٧

رتبة الحد الأوسط : ٤

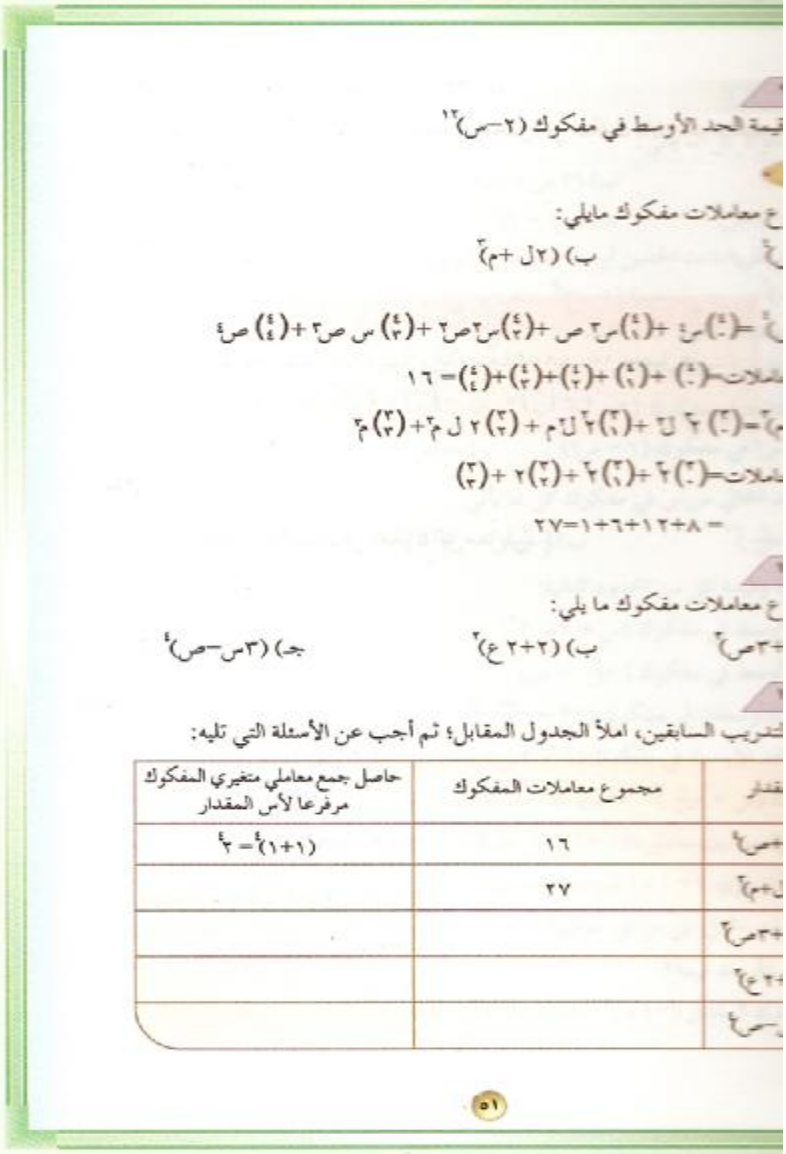
$ح_{٤} = -٤٣٢٠$

- اعط للطلاب النتيجة وأعرض عليهم المثال ٨ وناقش الطلاب فيه، يمكنك طرح الأسئلة في تعيين رتبة الحد الأوسط من خلال عرض مسائل يكون فيها الأس فردياً أو زوجياً.

تعزيز

في مفكوك $(٢ + ٣س)^{٦}$ أوجد :

معامل الحد الأوسط + معامل الحد الأخير



قيمة الحد الأوسط في مفكوك $(٢-س)^{١٢}$

ع معاملات مفكوك مايلي:

ب) $(٢ل+م)^{٣}$

$=(٤)س^{٤}+(٣)س^{٣}ص+(٢)س^{٢}ص^{٢}+(١)س ص^{٣}+(٠)ص^{٤}$

$=(٤)+(٣)+(٢)+(١)+(٠)=١٦$

$=(٣)^{٢}ل^{٣}+(٢)^{٢}ل^{٢}م+(١)^{٢}ل م^{٢}+(٠)م^{٣}$

$=(٣)^{٢}+(٢)^{٢}+(١)^{٢}+(٠)$

$=٨+١٢+٦+١=٢٧$

ع معاملات مفكوك ما يلي:

ب) $(٢+٢ع)^{٢}$ جـ) $(٣س-ص)^{٤}$

تدريب السابقين، املأ الجدول المقابل؛ ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

المقدار	مجموع معاملات المفكوك	حاصل جمع معاملي متغيري المفكوك مرفوعا لأس المقدار
$(س+ص)^{٤}$	١٦	$(١+١)^{٤}=٢^{٤}$
$(٢ل+م)^{٣}$	٢٧	
$(٢س+٣ص)^{٣}$		
$(٢+٢ع)^{٢}$		
$(٣س-ص)^{٤}$		

٥١

حل تدريب ٩

عدد الحدود = ١٣

رتبة الحد الأوسط هي : ٧

ح٧ = ٥٩١٣٦ س٦

حل تدريب ١٠

أ) ١٢٥

ب) ١٦

جـ) ١٦

ـ اعط الطلاب فرصة كافية للتوصل للقاعدة التي تساعده على إيجاد مجموع معاملات مفكوك في صيغة $(أ + ب)^{ن}$ دون الحاجة إلى فك المقدار.

حل تدريب ١١

المقـــدار	مجموع معاملات المفكوك	حاصل جمع معاملي متغيري المفكوك مرفوعاً لأس المقدار
$(س + ص)^{٤}$	١٦	$(١ + ١)^{٤} = ٢^{٤}$
$(٢ل + م)^{٣}$	٢٧	$٣^{٣}$
$(٢س + ٣ص)^{٣}$	١٢٥	$٥^{٣}$
$(٢ + ٢ع)^{٢}$	١٦	$٤^{٢}$
$(٣س - ص)^{٤}$	١٦	$٢^{٤}$

تابع حل تدريب ١١

٩) يلاحظ أن مجموع معاملات مفكوك ما يساوي حاصل جمع معاملي متغيري المفكوك مرفوعاً لأس المقدار.

ب)

① $٣^{٤} = ٨١$

② $١٢٥ \times ٧٨ = ٧^{٥}$

تمارين ومسائل ٤

١) أوجد مفكوك كل مما يأتي:

أ) $(أ - ب)^{٤}$ ب) $(٣س - \frac{١}{س})^{٤}$ جـ) $(\frac{٢}{س} + ٢س)^{٦}$

د) $(٣س - ٢ص)^{٤}$ هـ) $(س^{٢} + ١)^{٥}$ و) $(\frac{١}{س} + س)^{٦}$

٢) باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة كل مما يأتي مقربا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية:

أ) $(٠,٩٩)^{٥}$ ب) $(١,٠٠٢)^{٥}$

٣) أوجد باستخدام قانون الحد العام كلا مما يأتي :

أ) الحد الثالث في مفكوك $(أ - ٢ب)^{٥}$ ب) الحد السادس في مفكوك $(٢ - س ص)^{٧}$

جـ) الحد التاسع في مفكوك $(٢ص + ١)^{١٢}$ د) معامل الحد الرابع في مفكوك $(\frac{٣}{س} + س^{٢})^{٧}$

هـ) معامل $س^{٦}$ في مفكوك $(١ - س^{٢})^{٧}$ و) معامل $أ^{٤}ب^{٤}$ في مفكوك $(أ + ٢ب)^{٧}$

٤) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك كل مما يأتي:

أ) $(س - \frac{١}{س})^{١٢}$ ب) $(\frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})^{١٠}$

٥) أوجد رتبة وقيمة كل من الحدود التالية:

أ) الحد الأوسط في مفكوك $(س + ٢ص)^{١٠}$

ب) الحد الأوسط في مفكوك $(\frac{١}{س} - س)^{١٢}$

جـ) الحدان الأوسطان في مفكوك $(٢أ + \frac{ب}{٣})^{٧}$

٦) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $(١ + ٣س)^{ن}$ يساوي ٤٣٢٠ . فأوجد قيمة س.

٧) في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{ن}$ ، اثبت أن الحد الخالي من س هو الحد الأوسط.

٨) إذا كانت النسبة بين معامل الحد الثالث في مفكوك $(١ - س)^{٢٥}$ ومعامل الحد الثالث في مفكوك $(س + ١)^{ن}$ تساوي ٢١ : ١٠ فأوجد قيمة ن.

٩) إذا كان الحد الخالي من س في مفكوك $(س^{٢} + \frac{أ}{س^{٤}})^{١٢}$ يساوي معامل الحد الخامس في نفس المفكوك. فأوجد قيمة أ.

١٠) في مفكوك المقدار $(٣+٥)^{٥}$ ، باستخدام نظرية الحدين. ما أكبر حد نحصل عليه؟

حل تمارين ومسائل ٤

٢) أ) $\approx ٠,٩١٤$ ب) $\approx ٣٢,٨٠٨$

٣) أ) $ح_{٣} = ٤٠ أ^{٣} ب^{٢}$

ب) $ح_{٦} = -٨٤ س^{٥} ص^{٥}$

جـ) $ح_{٩} = ١٣٢٠ ص^{٣}$

د) معامل $ح_{٤} = ٢٨٣٥$

هـ) معامل $س^{٦} = -٣٥$

و) معامل $أ^{٣} ب^{٤} = ٥٦٠$

٤) أ) $ح_{٧} = ٩٢٤$ ب) $ح_{٦} = \frac{٦٣}{٢٥٦}$

٥) أ) $ح_{٦} = ٨٠٦٤ س^{٥} ص^{٥}$

ب) $ح_{٧} = ٥٩١٣٦$

جـ) $ح_{٤} = \frac{٥٦٠}{٢٧} أ^{٤} ب^{٣}$

$ح_{٥} = \frac{٢٨٠}{٨١} أ^{٣} ب^{٤}$

٦) $س = ٢$

٧) $\because ٢٠٠$ ن عدد زوجي

$\therefore$ يوجد حد أوسط واحد رتبته

$= \frac{٢ن}{٢} + ١ = ن + ١$

قيمته $ح_{ن+١} = (\frac{٢ن}{٢})(س)^{ن}(\frac{١}{س})^{ن}$

$= (\frac{٢ن}{٢})$ وهو الحد الخالي من س .

٨) $ح_{٣} = (\frac{ن+٢}{٢})(-س)^{٢}$ ، $ح_{٣} = (\frac{ن}{٢})(س)^{ن-٢}$

$(\frac{ن+٢}{٢}) : (\frac{ن}{٢}) = ٢١ : ١٠$ ، $\frac{(ن+٢)!}{٢! \times ن!} \times \frac{٢!(ن-٢)!}{ن!} = \frac{٢١}{١٠}$

$١١ ن^{٢} - ٥١ ن - ٢٠ = ٠ \Leftarrow (١١ن + ٤)(ن - ٥) = ٠$ $\therefore ن = ٥$

٩) الحد الخالدي من س : $ح_{ر+١} = (\frac{١٥}{ر})(س٢)^{١٥-ر}(\frac{أ}{س٤})^{ر}$ $\therefore$ س$^{٣٠-٦ر}$ = س^{٠} $\therefore ر = ٥$ $\therefore ح_{٦} = (\frac{١٥}{٥}) أ^{٥}$

معامل الحد الخامس $= (\frac{١٥}{٤}) أ^{٤} \Leftarrow (\frac{١٥}{٥}) أ^{٥} = (\frac{١٥}{٤}) أ^{٤}$ $\frac{(\frac{١٥}{٤})}{(\frac{١٥}{٥})} = أ$ $\therefore \frac{٥}{١١} = أ$

١٠) حاول إعادة صياغة المسألة للطلاب الضعاف بحيث تكون مثلاً: $(٣ + ٥)^{٧}$ وللطلاب العاديين $(٣ + ٥)^{١٥}$

الحل

$(٣ + ٥)^{٥٠} = \sum_{ر=٠}^{٥٠} (\frac{٥٠}{ر}) \times ٥^{ر} \times ٣^{٥٠-ر}$

$ح_{١} = ٣^{٥٠}$ ، $ح_{٢} = ٢٥٠ \times ٤٩٣$ ، $ح_{٣} = ٣٠٠٠٠ \times ٤٨٣$ ، ..... ، ..... ، $ح_{٢٥} = (\frac{٥٠}{٢٤}) \times ٢٦٣ \times ٢٤٥$

$ح_{٢٦} = (\frac{٥٠}{٢٥}) = ٢٥٥ \times ٢٥٣$ ، $ح_{٢٧} = (\frac{٥٠}{٢٦}) \times ٢٤٣ \times ٢٦٥$ ، .....

الحد الأوسط

حل تمارين ومسائل عامة

١) 10^{5} رقم ٢) ٦٠ رقم

٣) $\binom{5}{3} \times \binom{8}{3} = 560$ طريقة

٤) أ) ن = ٢ ب) ن = ١٠ جـ) ن = ٨

د) ن = ٥ هـ) ن = ١٧

٥) $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٤)! \times ٤!} < \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٣)! \times ٣!}$ ، ن > ٧

٦) ر = ٣ ، ن = ٧ ، $ل_{٤}^{١٠} = ٥٠٤٠$

٧) أ) ١٦ ب) $\frac{٢٢٤}{٩}$

٨) $س^{٧} ص^{٤} = ٤٢٢٤٠$ ، $س^{٤} ص^{٤} = ٥٢٨٠$

٩) $= ١١٤٤٠ + ٢٥٢ = ١١٦٩٢$

١٠) ن = ١٥

تمارين ومسائل عامة

١) في إحدى ولايات السلطنة تبدأ أرقام الهواتف فيها بالرقم ٢٤٤ وجميع الأرقام تتكون من ثمانية أرقام. فكم عدد الأرقام الممكنة في الولاية؟

٢) كم عددا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ويقبل القسمة على ٥ مع السماح بتكرار الرقم؟

٣) تقدم ٨ رجال و ٥ نساء لشغل ٦ وظائف في إحدى الشركات بشرط أن تشغل ثلاث سيدات ثلاث وظائف منها ، بكم طريقة يمكن اختيار الموظفين الستة؟

٤) أوجد قيمة ن في كل مما يأتي :

أ) $(٥ن - ٣)! = ١$

ب) $\frac{(ن-٣)!}{(ن-٥)!} = ٤٢$

جـ) $\frac{١}{١٥} + \frac{٣}{(١+ن)!} = \frac{١٢٠}{(٢+ن)!}$

د) $ل_{٣}^{ن} \div ل_{٣}^{ن+١} = ١$

هـ) $٥ \binom{ن}{٤} = \binom{ن}{٣}$

٥) إذا كان $\binom{ن}{٤} < \binom{ن}{٣}$ ، فاثبت أن ن > ٧ .

٦) إذا كان $٩ \times ر! = ٥٤ \binom{ن}{ر} = ٣٥$ ، فأوجد $ل_{٤}^{ن+١}$.

٧) في مفكوك $(س + \frac{٢}{س^{٣}})^{٩}$ أوجد:

أ) معامل $س^{٣}$.

ب) الحد الخالي من س .

٨) أوجد الحد الخامس من البداية والحد الخامس من النهاية في مفكوك $(٢س + ص)^{١١}$.

٩) أوجد معامل $س^{٥}$ في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٠} + (س + \frac{٢}{س})^{٢٠}$.

١٠) إذا كان ضعف معامل الحد الحادي عشر في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ يساوي ثلاثة أمثال معامل الحد العاشر في مفكوك $(١ + ص)^{ن-١}$. فأوجد قيمة ن.

٥٤

(تكملة حل ١٠ لتمارين ومسائل ٤)

$ح_{٥٠} = \binom{٥٠}{٤٩} \times ٣ \times ٥^{٤٩}$ ، $ح_{٥١} = \binom{٥٠}{٥٠} \times ٥^{٥٠}$ ، إذا قمنا بقسمة الحد الأخير على الحد الأول والحد قبل الأخير على الحد الثاني تحصل على : $(\frac{٥}{٣})^{٥٠}$ ، $(\frac{٥}{٣})^{٤٨}$ .. وهكذا بالنسبة للحدود الأخرى .

نلاحظ أن: الحد الذي في السلسلة الثانية أكبر من الحد الذي في السلسلة الأولى، الحد الأكبر سيكون من السلسلة الثانية وليكن $ح_{ر}$.

حيث أن : $ح_{ر+١} = \binom{٥٠}{ر} ٣^{٥٠-ر} ٥^{ر}$ ، $ح_{ر} = \binom{٥٠}{ر-١} ٣^{٥٠-ر+١} ٥^{ر-١}$ ، $ح_{ر+٢} = \binom{٥٠}{ر+١} ٣^{٥٠-ر-١} ٥^{ر+١}$

$\because ح_{ر+١}$ هو الحد الأكبر $\therefore ح_{ر} < ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢} < ح_{ر+١}$ ، أي أن :

$\binom{٥٠}{ر} ٣^{٥٠-ر} ٥^{ر} < \binom{٥٠}{ر-١} ٣^{٥٠-ر+١} ٥^{ر-١} \Leftarrow \binom{٥٠}{ر} ٥ > \binom{٥٠}{ر-١} ٣ \Leftarrow \frac{٣}{٥١-ر} < \frac{٥}{ر}$

$\Leftarrow ر + ١ < ٣٢,٨٧٥$ ، ومن $ح_{ر+٢} < ح_{ر+١}$ نحصل على $ر + ١ < ٣١,٨٧٥$

أي أن $ح_{٣٢}$ هو أكبر حد يمكن الحصول عليه في مفكوك $(٣ + ٥)^{٥٠}$

١١) أضاعت سلوى الرقم السري (الكود Pin) لحقيبتها، لكنها تذكرت أن هذا العدد مكوّن من ٦ أرقام مختلفة وهي ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ بحيث:

- العدد المكوّن من الرقمين الأولين (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على ٢.
- العدد المكوّن من الأرقام الثلاثة الأولى (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على ٣.
- العدد المكوّن من الأرقام الأربعة الأولى (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على ٤.
- العدد المكوّن من الأرقام الخمسة الأولى (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على ٥.
- العدد المكوّن من الأرقام الستة الأولى (من اليسار لليمين) يقبل القسمة على ٦.

ساعد سلوى في إيجاد هذا الرقم السري.

تابع حل تمارين ومسائل عامة

١١) الرقم السري هو :

٤ ٥ ٦ ٣ ٢ ١

أو ٤ ٥ ٦ ١ ٢ ٣

توضيح الحل :

بفرض أن العدد هو :

$م_6$ $م_5$ $م_4$ $م_3$ $م_2$ $م_1$

الشروط هي :

- $م_2$ $م_1$ يقبل القسمة على ٢ .
- $م_3$ $م_2$ $م_1$ يقبل القسمة على ٣ .
- $م_4$ $م_3$ $م_2$ $م_1$ يقبل القسمة على ٤ .
- $م_5$ $م_4$ $م_3$ $م_2$ $م_1$ يقبل القسمة على ٥ .
- $م_6$ $م_5$ $م_4$ $م_3$ $م_2$ $م_1$ يقبل القسمة على ٦ .

أي أن :

- $م_2$ عدد زوجي .
- ($م_3$ + $م_2$ + $م_1$) من مضاعفات ٣ .
- ($م_4$ $م_3$) من مضاعفات ٤ .
- $\boxed{م_5 = 5}$
- ($م_6$ + $م_5$ + $م_4$ + $م_3$ + $م_2$ + $م_1$) يقبل القسمة على ٣ ، و $م_6$ عدد زوجي

- $م_2$ ، $م_4$ ، $م_6$ عدد زوجي
- $م_1$ ، $م_3$ ، $م_5$ عدد فردي

∵ $م_5 = 5$ ، ∴ $م_1$ ، $م_3 \in \{1 ، 3\}$

∵ $م_1$ + $م_2$ + $م_3$ من مضاعفات ٣

∴ $م_2 = 2$

∵ $م_4$ + $م_5$ + $م_6$ من مضاعفات ٣

تكون عندما : ٤ + ٥ + ٦ = ١٥

∴ $م_4$ ، $م_6 \in \{4 ، 6\}$ ، لأن $م_5 = 5$

∵ $م_4$ $م_3$ من مضاعفات ٤ ⇐ $م_4 = 6$

لماذا؟

$م_3 \in \{1 ، 3\}$

∴ $\boxed{م_6 = 4}$

مما سبق نجد أن :

$م_2 = 2$ ، $م_4 = 6$ ، $م_5 = 5$ ، $م_6 = 4$

أي أن : $م_1$ ، $م_3 \in \{1 ، 3\}$

∴ الرقم السري هو :

٤ ٥ ٦ ٣ ٢ ١

أو ٤ ٥ ٦ ١ ٢ ٣

اختبار الوحدة

١) عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من رقمين مختلفين باستخدام الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، وتكون أكبر من ٥٠ هي :

أ) ١٠ ب) ١١ ★ ج) ١٢ د) ٢٠

٢) إذا كان $ل^{٩}_{ر+١} = ٦ \ ل^{٩}_{ر}$ فإن قيمة ر هي :

★ أ) ٣ ب) ٦ ج) ٩ د) ١٢

٣) إذا كان $\frac{(ن+١)! - ن!}{(ن+١)! + ن!} = \frac{٢}{٣}$ فإن قيمة ن تساوي :

أ) ١ ب) ٣ ★ ج) ٤ د) ٦

٤) إذا كانت $ل^{ن+٢}_{٤} = ٣٦ \binom{ن+١}{٢}$ فإن قيمة ن تساوي :

أ) ٢ ★ ب) ٤ ج) ٦ د) ٣٦

٥) إذا كانت $\binom{س}{ص} : \binom{س}{ص+١} : \binom{س}{ص+٢} = ١ : ٢ : ٣$ فإن قيمة س ، ص تساوي :

أ) ١ ، ١٢ ب) ١٢ ، ٣ ★ ج) ١٤ ، ٤ د) ٣ ، ١٤

٦) إذا كان $\binom{ن}{٥} = \binom{ن}{٧}$ فإن $\binom{ن}{١٠}$ يساوي :

أ) ٣٥ ب) ٥٠ ★ ج) ٦٦ د) ٧٠

٧) الحد الخامس في مفكوك $(١ - ٢س)^{٨}$ يساوي :

أ) $٤٤٨ س^{٣}$ ب) $١٤٠ س^{٤}$ ★ ج) $١١٢٠ س^{٤}$ د) $١٧٩٢ س^{٥}$

٨) إذا كانت النسبة بين معاملي $ح_{٨}$ ، $ح_{٩}$ في مفكوك $(٣ + س)^{ن}$ تساوي ٣ : ٢ فإن قيمة ن تساوي :

أ) ١٢ ب) ١٣ ★ ج) ٢٣ د) ٣٣

٩) معامل $س^{-٣}$ في مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س^{٢}}\right)^{١٢}$ هو :

أ) ٢٣٥ ب) ٢٥٣ ج) ٣٢٥ ★ د) ٣٥٢

١٠) الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{١}{س} + ص\right)^{٨}$ هو :

أ) $\frac{٧٠ ص^{٤}}{س^{٤}}$ ب) $\frac{٥٦ ص^{٣}}{ص^{٥}}$ ★ ج) $\frac{٧٠ س^{٤}}{ص^{٤}}$ د) $\frac{٥٦ س^{٣}}{ص^{٥}}$